10 класс. Решение и критерии оценивания

Задача №1

Упростите сумму:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2018}+\sqrt{2017}}=$$

Ответ: $\sqrt{2018}-1$.

Решение: Если числитель и знаменатель каждой из дробей умножить на разность тех корней, которые складывались в знаменателе, то знаменатели всех дробей превратятся в 1, а числители создадут знакопеременный пример с корнями:

$$\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{2017}-\sqrt{2016}+\sqrt{2018}-\sqrt{2017}=\sqrt{2018}-1$$

Критерии: Если ученик аргументировано получил правильный ответ, то он получает за задачу 7 баллов; при правильном ответе, но недостаточном пояснении выставляем 5-6 баллов; только за правильный ответ выставляем 1 балл; за правильный подход, но неверный ответ из-за вычислительной ошибки выставляем 3 балла.

Задача №2

Две стороны и площадь треугольника соответственно равны 11, 20 и 66. Найдите третью сторону.

Решение:

1 способ.

$$66=S=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot h\Rightarrow h=6{,}6$$

Отсюда проекция стороны длиной 11 на сторону длины 20 равна $\sqrt{11^2-6{,}6^2}=8{,}8$. Значит, квадрат третьей стороны равен $6{,}62+(20\pm 8{,}8)^2$, т.е. равен 873 для тупоугольного треугольника, и 169 для остроугольного, т.е. третья сторона $3\sqrt{97}{,}13$

2 способ. $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\alpha$, т.е. $2\cdot 66=20\cdot 11\cdot\sin\alpha$, откуда $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ т.е. $\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$, откуда квадрат третьей стороны $11^2+20^2\pm 2\cdot 20\cdot 11\cdot\frac{4}{5}$, или $3\sqrt{97}{,}13$.

Критерии: рассмотрен только один случай - 4 балла. Не знание основных формул - 0 баллов. За вычислительную ошибку, не ведущую к упрощению вычислений, снимать 2 балла.

Задача №3

Компания по переработке вторичных отходов выпустила облигации на сумму 100 млн. рублей, сроком на 4 года. Инвестор заключил договор, по которому прирост вложенных им средств составит 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются в обороте компании. Кроме этого, инвестор обязуется производить дополнительные вложения (возможно не однократные) по требованию компании в течение расчетного года, процент на них начисляется только со следующего года.

На какое наименьшее целое число миллионов нужно купить инвестору облигаций, чтобы за эти 4 года накопленные средства превысили 170 млн. рублей, если за 1-й и 2-й годы ему пришлось дополнительно вложить по 20 млн рублей, а за 3-й и 4-й годы еще по 10 млн рублей?

Ответ: 41 млн. рублей

Решение: Обозначим за x млн. рублей приобретенные инвестором облигации, тогда

конец 1 года: $1{,}2x + 20$

конец 2 года: $(1{,}2x + 20) \cdot 1{,}2 + 20$

конец 3 года: $\big((1{,}2x + 20) \cdot 1{,}2 + 20\big) \cdot 1{,}2 + 10$

конец 4 года: $\Big(\big((1{,}2x + 20) \cdot 1{,}2 + 20\big) \cdot 1{,}2 + 10\Big) \cdot 1{,}2 + 10$

$$\Big(\big((1{,}2x + 20) \cdot 1{,}2 + 20\big) \cdot 1{,}2 + 10\Big) \cdot 1{,}2 + 10 > 170$$

$$2{,}0736x + 85{,}36 > 170$$

$$x > 40$$

Критерии: Только ответ 0 баллов, если аргументированно получен верный ответ - 7 баллов, если при верном ходе решения допущена вычислительная ошибка - 5 баллов.

Задача №4

Считается, что плоскость раскрашена, если о каждой её точке можно сказать какого она цвета. Некоторую плоскость раскрасили в два цвета. Докажите, что на плоскости найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 15.

Решение: Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 15. По принципу Дирихле, по крайней мере, две вершины из трёх должны быть покрашены в один цвет. Выбираем их, они и есть искомая пара точек.

Критерии: Если ученик предложил полное решение, то он получает 7 баллов. Если ученик не упомянул принцип Дирихле, а рассуждал с использованием идеи «в худшем случае» баллы не снижаем. Если предложена другая фигура (не равносторонний треугольник), внимательно отслеживаем наличие нужных точек. При погрешностях в рассуждениях можно снижать оценку на 1 – 2 балла. Рассуждения, не приводящие к верному выводу оценивать в 0 баллов.

Задача №5

В компании 16 человек. Каждому нравится 8 человек из компании. Докажите, что найдутся двое, которые нравятся друг другу.

Решение: Соединим точки A и B линией со стрелкой, выходящей из A и идущей в B, если человеку A нравится B. Всего таких стрелок будет $16 \cdot 8 = 128$. Посчитаем, сколько линий, соединяющих 16 точек, вообще можно провести $16 \cdot (16 - 1) : 2 = 120$. Значит, на 120 линиях расположено 128 стрелок. Понятно, что на какой-то линий будет 2 стрелки, значит, найдутся двое, которые нравятся друг другу.

Критерии: Подсчитали общее количество отрезков - 2 балла; ввели на них стрелки и подсчитали их количество - 5 баллов. Сделали логическое заключение - 7 баллов.