9 класс. Решение и критерии оценивания

Задача №1

Результат сложения кубов всех натуральных чисел от 1 до 2018 является многозначным числом. Найдите последнюю цифру этого числа.

Ответ: 1.

Решение: Наблюдаются определённые сложности в подсчёте всей суммы: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 2017^3 + 2018^3$. В сумму входят подряд кубы всех натуральных чисел, начиная с единицы и заканчивая 2018. Добавим к сумме 2019^3 и сгруппируем получившиеся слагаемые:

$$(1^3 + 2019^3) + (2^3 + 2018^3) + (3^3 + 2017^3) + \ldots + (1009^3 + 1011^3) + 1010^3.$$

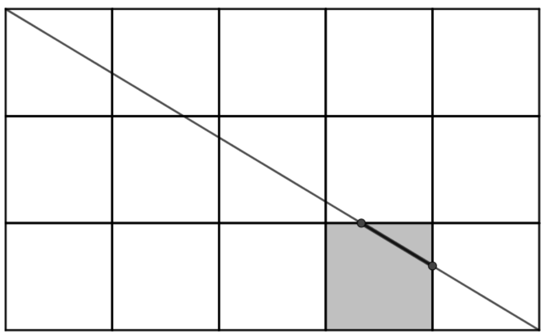
Применив к каждой скобке сумму кубов, получим общий множитель $2020 \cdot (2020 = 1 + 2019 = 2 + 2018 = 3 + 2017 = \ldots = 1009 + 1011)$, следовательно, все слагаемые вновь предложенной суммы делятся на 10, и данная сумма будет оканчиваться нулём. Но исходная сумма на 2019^3 меньше, и т.к. 2019^3 оканчивается цифрой 9, то заданная сумма оканчивается 1.

Замечание: Очевидно, что есть и другие обоснования (дети в рассуждениях могут менять многозначные числа на последние цифры, считать дополнительно «короткие» суммы и далее обобщать свои действия).

Критерии: Если ученик аргументировано получил правильный ответ, то он получает за задачу 7 баллов; при правильном ответе, но недостаточном пояснении выставляем 5-6 баллов; только за правильный ответ выставляем 1 балл; за правильный подход, но неверный ответ из-за вычислительной ошибки выставляем 3 балла.

Задача №2

В прямоугольнике 3×5 клеток провели диагональ и закрасили одну клетку так, как это показано на рисунке. Какая часть диагонали будет находиться в закрашенной клетке?



Решение: Применим теорему Фалеса. По ней, горизонтальные параллельные прямые делят диагональ на 3 равные части. Вертикальные прямые делят её на 5 равных частей. Тогда искомый отрезок равен части диагонали.

Критерии: Если есть только ответ - 0 баллов; приведён пример - 4 балла; есть обоснование - 7 баллов. Возможно решение с применением теоремы Пифагора.

Задача №3

Дмитрий, Сергей, Валентин и Андрей учредили компанию с уставным капиталом 250 000 рублей. Дмитрий внес $25\,\%$ уставного капитала, Сергей — 80 000 рублей, Валентин — 0,25 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Андрей. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 6 000 000 рублей причитается Андрею? Ответ дайте в рублях.

Ответ: 1 080 000 сумма от прибыли причитающаяся Андрею
Решение:
Дмитрий и Валентин вместе внесли 50% уставного капитала, то есть 125 000, тогда Андрей внес $125000 - 80000 = 45000$

Обозначим за x сумму прибыли Андрея, тогда можно составить пропорцию.

$$\frac{250000}{45000} = \frac{6000000}{x}$$

откуда $x = 1080000$
Критерии: Только ответ 0 баллов, если аргументированно получен верный ответ - 7 баллов, если при верном ходе решения допущена вычислительная ошибка - 5 баллов, если установлена доля Андрея, то можно можно поставить 3 балла.

Задача №4

Во сколько цветов можно раскрасить квадрат 3 на 3 (каждую из 9 клеток красят в один цвет), чтобы для каждой пары цветов, нашлись две соседние по стороне клетки, раскрашенные в эти два цвета? Найдите все возможные ответы.

Ответ: 1, 2, 3, 4, 5.
Решение:

1	1	1		1	2	1		1	2	3		1	2	3		4	3	5
1	1	1		2	1	2		2	3	1		3	4	1		2	1	4
1	1	1		1	2	1		3	2	1		1	3	2		3	5	2

На рисунках показаны раскраски в 1, 2, 3, 4 и 5 цветов. Но теперь нужно обосновать, что раскрасить в шесть цветов по этим правилам нельзя. Так как каждая клетка имеет не более 4 соседних по стороне клеток, то для выполнения условия для каждого цвета нужно иметь не менее двух клеток. Тогда нам понадобилось бы, по крайней мере, 12 клеток, а у нас их только 9.

Критерии: Если ученик предложил полное решение, то он получает 7 баллов. Если ученик привёл примеры раскраски в 1, 2, 3, 4 и 5 цветов, но не доказывал, что нельзя раскрасить в 6 цветов, то выставляем 4 балла. За раскраску в 1, 2, 3, 4 выставляем 2 балла. За отсутствие раскраски в 1 цвет снимаем 1 балл.

Задача №5

На циферблате по кругу расположены 1994 точки. Докажите, что найдётся момент времени, начиная с которого в течении 200 секунд минутная стрелка пробежит хотя бы вдоль 111 точек

Решение: Вычислим величину сектора в градусах, который пройдёт минутная стрелка за 200 секунд: $3600 : (60 \cdot 60) \cdot 200 = 200$. Тогда на циферблате таких секторов будет $360^{\circ} : 20^{\circ} = 18$ штук. Имеем $1994 = 18 \cdot 110 + 14$, т.е. в каждый сектор попадёт не менее 110 точек и ещё останется 14. Значит в каком то секторе будет не менее 111 точек, т.е. минутная стрелка пробежит вдоль 111 точек.

Критерии: Если есть только идея разбиения циферблата на сектора и найдено их число, то - 3 балла. Если получено равенство - 5 баллов. Сделано логическое заключение - 7 баллов.