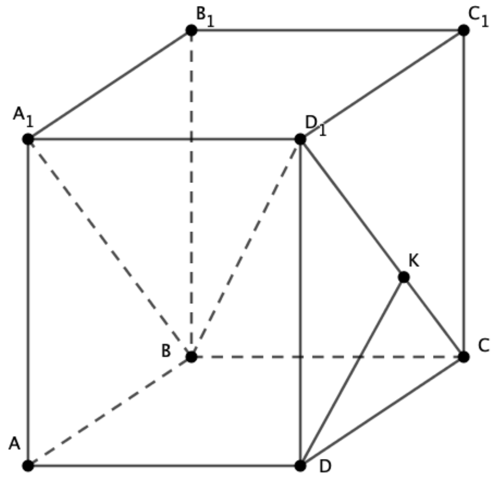
11 класс. Решение и критерии оценивания
Задача №1
Упростите сумму: $cos1^\circ + cos2^\circ + cos3^\circ + cos4^\circ + \ldots + cos179^\circ + cos180^\circ$.

Ответ: -1
Решение: Для решения задания нужно воспользоваться формулой приведения:
$cos(180^\circ - x) = -cosx$, тогда разбиваем 180 слагаемых на 90 пар:
$(cos1^\circ + cos179^\circ) + (cos2^\circ + cos178^\circ) + (cos3^\circ + cos177^\circ) + \ldots + (cos89^\circ + cos91^\circ) + (cos90^\circ + cos180^\circ)$
Во всех скобках, кроме последней, сумма равна нулю, а в последней: $0 + (-1) = -1$.
Критерии: Если ученик аргументировано получил правильный ответ, то он получает за задачу 7 баллов; при правильном ответе, но недостаточном пояснении выставляем 5-6 баллов; только за правильный ответ выставляем 1 балл; за правильный подход, но неверный ответ из-за вычислительной ошибки выставляем 3 балла.

Задача №2
В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 16, а высота 20. Найдите кратчайшее расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы.



Решение: Найдем расстояние между прямыми AD и BD_1 Плоскость A_1BCD_1, содержащая BD_1, параллельна прямой AD, поэтому расстояние между этими прямой и плоскостью и есть искомое. В плоскости DCC_1D_1 опустим перпендикуляр DK на CD_1, поскольку $(BC) \perp (DCC_1D_1)$ Значит, $(DK) \perp (A_1BCD_1)$. Следовательно, DK и есть искомое расстояние. DK — высота в прямоугольном треугольнике CDD_1. Методом площадей находим высоту треугольника

$$DK = \frac{DD_1 \cdot DC}{CD_1} = \frac{20 \cdot 16}{4\sqrt{41}} = \frac{80}{\sqrt{41}}.$$

Критерии: Правильно построили искомый отрезок без обоснования - 2 балла. Если ещё есть обоснование, то 4 балла. Правильно вычислили полученный отрезок - 7 баллов. Сделали вычислительную ошибку - снимать 2 балла.

Задача №3

Михаил Борисович является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудится суммарно T^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3T$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно T^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $7T$ единиц товара.
За каждый час работы (на каждом из заводов) Михаил Борисович платит рабочему 980 рублей. Михаилу Борисовичу нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Ответ: 5 684 000
Решение: Обозначим за x^2 - время, которое трудятся рабочие на заводе в первом городе, а за y^2 время, которое трудятся рабочие во втором городе. Тогда в неделю будет произведено $3x + 7y$ единиц товара. Затраты на оплату труда составят $980 \cdot \left(x^2 + y^2\right)$ рублей. При условии $3x + 7y = 580$ нужно найти наименьшее значение $980 \cdot \left(x^2 + y^2\right)$.
Выразим y из выражения $3x + 7y = 580$

$$y = \frac{580 - 3x}{7}$$

Найдем наименьшее значение функции

$$S(x) = 980 \cdot \left(x^2 + \left(\frac{580 - 3x}{7}\right)^2\right)$$

после преобразования получим

$$S(x) = 20 \cdot (58x^2 - 3480x + 336400)$$

наименьшее значение будет достигаться при

$$x = \frac{3480}{2 \cdot 58} = 30$$

при этом получаем значение функции равно 5 684 000
Критерии: Только ответ 0 баллов, если аргументированно получен верный ответ - 7 баллов, если при верном ходе решения допущена вычислительная ошибка - 5 баллов.

Задача №4

Считается, что трёхмерное пространство раскрашено, если о каждой его точке можно сказать какого она цвета. Некоторое трёхмерное пространство раскрасили в три цвета. Докажите, что в пространстве найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 15.

Решение: Рассмотрим в пространстве правильный тетраэдр с ребром 15. По принципу Дирихле, по крайней мере, две вершины из четырёх должны быть покрашены в один цвет. Выбираем их, они и есть искомая пара точек.
Критерии: Если ученик предложил полное решение, то он получает 7 баллов. Если ученик не упомянул принцип Дирихле, а рассуждал с использованием идеи «в худшем случае» баллы не снижаем. Если предложена другая фигура (не правильный тетраэдр), внимательно отслеживаем наличие нужных точек. При погрешностях в рассуждениях можно снижать оценку на 1 – 2 балла. Рассуждения, не приводящие к верному выводу оценивать в 0 баллов.

Задача №5

В квадрат 1×1 бросили 51 точку. Докажите, что найдётся круг радиусом $\frac{1}{7}$, содержащий не менее трёх из этих точек.

Решение: Разделим квадрат на квадраты размером $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$. Таких квадратов 25, значит, среди 51 точки найдутся три, содержащиеся в одном квадрате ($2 \cdot 25 < 51$). Диагональ каждого такого квадрата $\frac{\sqrt{2}}{5}$, что меньше $\frac{2}{7}$.($7\sqrt{2} < 5 \cdot 2$, т.к. $\sqrt{98} < 10$), значит, круг радиусом $\frac{1}{7}$ накроет тот квадрат, в котором находится не менее трёх точек.

Критерии: Догадались разбить на 25 квадратов - 2 балла; сделали вывод о существовании 3 точек в одном квадрате - 4 балла; подсчитали радиус описанной окружности около квадрата и сравнили его с $\frac{1}{7}$ - 7 баллов.